בוחן אמצע, סמסטר אביב תשפ״ב - אלגברה 1/מ, 104016

29.5.22

פתרונות מלאים

ת״ז:

פקולטה:

- משך הבוחן: 2 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם **בדפים אלה**. אפשר להשתמש בשני צידי הדף. **מחברות טיוטה לא יאספו**.
- **בשאלות 1-2** יש **לנמק** היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב.
  בשאלות 3-7 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון.
- **אין צורך לרשום נימוקים בשאלות 3-7.** נימוקים בשאלות אלה לא יבדקו.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 3-7

	שאלה מס׳ 3	שאלה מס׳ 4	שאלה מס׳ 5	שאלה מס׳ 6	שאלה מס׳ 7
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (29 נקודות). בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ומנומק

נתונה מערכת המשוואות $A\overline{x}=b$ עם שלושה נעלמים ממשיים x,y,z כאשר $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ פרמטר:

$$\begin{cases} x+\alpha y+z=1 \\ \alpha x+3\alpha y+z=2-\beta \\ \alpha x+\alpha^2 y+z=2+\alpha \end{cases}$$

א. (15 נק')

(i) לאילו ערכים של α,β יש למערכת פתרון יחיד?

(ii) לאילו ערכים של α,β יש למערכת אינסוף פתרונות?

(iii) לאילו ערכים של α,β אין למערכת פתרון?

ב. (5 נק') מצאו שני פתרונות שונים למערכת $A\overline{x}=b$ אם נתון כי $\alpha=\beta$.

ג. (7 נק') מצאו את הפתרון הכללי למערכת $A\overline{x}=0$ בכל המקרים בהם למערכת זו יש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת.

פתרון שאלה 1:

נדרג את מטריצת המקדמים המורחבת:

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 3\alpha & 1 & 2-\beta \\ \alpha & \alpha^2 & 1 & 2+\alpha \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha & 2-\beta-\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 2 \end{array}\right)$$

א. מספר המשוואות אחרי דרוג שווה למספר הנעלמים, ולכן למערכת פתרון יחיד אם"ם כל איבר מוביל שונה מ- 0 כלומר אם"ם $\alpha\neq 0,1,3$ וכל $\beta\in\mathbb{R}$.

נציב איברים מובילים לבדיקת האפשרויות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha & 2-\beta-\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 2 \end{array}\right)\underset{\alpha=0}{=}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\beta \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{array}\right)$$

לפי השרה האחרונה, למערכת אין פתרון עבור $\beta\neq 0$, ויש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת עבור $\beta=0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha & 2-\beta-\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 2 \end{array}\right)\underset{\alpha=3}{=}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1-\beta \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 3+\beta \end{array}\right)$$

לפי השרה האחרונה, למערכת אין פתרון עבור $\beta\neq -3$, ויש אינסוף פתרונות עם דרגת חופש אחת עבור $\beta=-3$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha & 2-\beta-\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 2 \end{array}\right)\underset{\alpha=1}{=}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1-\beta \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

לפי השרה האחרונה, למערכת אין פתרון עבור כל $\beta\in\mathbb{R}$.

סיכום: יחיד $\alpha\neq 0,1,3$. אינסוף: $(\alpha,\beta)=(0,0)$ או $(\alpha,\beta)=(3,-3)$. סתירה: $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ או $\alpha=3$, $\beta\neq -3$ או $\alpha=1$, $\beta\in\mathbb{R}$.

ב. נתון כי $\alpha = \beta$ ולמערכת יש שני פתרונות ולכן יש אינסוף פתרונות, וזה אפשרי ר כאשר: $\alpha = \beta = 0$. מהדרוג שעשינו בסעיף א', נפתור את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 3\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha & 2-\beta-\alpha \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 2 \end{array}\right) \underset{\alpha=\beta=0}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+z=1 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(-1,y,2) \quad y\in\mathbb{R} \quad \underset{y=0}{\Rightarrow} (x,y,z)=(-1,0,2) \quad , \quad \underset{y=1}{\Rightarrow} (x,y,z)=(-1,1,2)$$

ג. דרגת חופש אחת להומוגנית המתאימה יש ב- 3 מקרים: $\alpha = 0,1,3$.

$$(i) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 3\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right) \underset{\alpha=0}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(0,y,0) \quad y\in\mathbb{R}$$

$$(ii) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 3\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right) \underset{\alpha=1}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(-z,0,z) \quad z\in\mathbb{R}$$

$$(iii) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 3\alpha-\alpha^2 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\alpha & 0 \end{array}\right) \underset{\alpha=3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y,z)=(-3y,y,0) \quad y\in\mathbb{R}$$

<u>שאלה מס' 2</u> : (36 נקודות) בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ומנומק

הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית מספרית את **4** הטענות הבאות (במקרה של מתן דוגמא נגדית מספרית, יש להסביר מדוע זו דוגמא נגדית):

א. (9 נק') יהיו $z,w\in\mathbb{C}$ כך ש $z\neq w$. אם $|z|=1$ אזי $\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|=1$.

טענה נכונה: צריך להוכיח $\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|=1$ כלומר צריך להוכיח $|z-w|=|1-\overline{w}z|$ או מאחר והכל חיובי צריך להוכיח: $|1-\overline{w}z|^2=|z-w|^2$:

$$|1-\overline{w}z|^2=(1-\overline{w}z)\overline{(1-\overline{w}z)}=(1-\overline{w}z)(1-w\overline{z})=1-w\overline{z}-\overline{w}z+\overline{w}zw\overline{z}=\underbrace{1}_{z\overline{z}}-w\overline{z}-\overline{w}z+\overline{w}w\underbrace{z\overline{z}}_{=1}$$

$$=z\overline{z}-w\overline{z}-\overline{w}z+\overline{w}w=\overline{z}(z-w)-\overline{w}(z-w)=(z-w)(\overline{z}-\overline{w})=(z-w)\overline{(z-w)}=|z-w|^2$$

אפשרות אחרת (זכרו כי לכל מספר מרוכב מתקיים $|z|=|\overline{z}|$):

$$\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|=\left|\frac{z-w}{|z|^2-\overline{w}z}\right|=\left|\frac{z-w}{z\overline{z}-\overline{w}z}\right|=\left|\frac{z-w}{z(\overline{z}-\overline{w})}\right|=\left|\frac{z-w}{z\overline{(z-w)}}\right|=\left|\frac{1}{z}\right|\left|\frac{z-w}{\overline{(z-w)}}\right|=\frac{1}{|z|}\frac{|z-w|}{|\overline{(z-w)}|}=1\cdot 1=1$$

ב. (9 נק') יהיו $A\,,\,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות שונות מ- 0. אם A משולשת עליונה וגם AB משולשת עליונה אז גם B משולשת עליונה.

טענה לא נכונה. ניקח לדוגמא: $AB=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ אז המטריצות $A\,,\,AB$ משולשות עליונות אבל B לא משולשת עליונה.

ג. (9 נק') תהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. אם למערכת $A\bar{x}=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$ אז בהכרח $m\le n$.

טענה נכונה: אם למערכת $A\bar{x}=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^m$ אז בהכרח לא מתאפסת שורה בדרוג (אחרת נוכל למצוא $b\in\mathbb{R}^m$ עבורו למערכת אין פתרון) ולכן $r(A|b)=r(A)=m$ לכל $b\in\mathbb{R}^m$. אבל לפי משפרט, לכל $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ מתקיים: $r(A)\le\min\{m,n\}$ ולכן $r(A|b)=r(A)=m\le n$.

ד. (9 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F. יהיו v_1,v_2,v_3,v_4 וקטורים בלתי תלויים לינארית ב- V, ויהי $w=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4$ כאשר $\alpha_j\in F$. אם $\alpha_3\neq 0$ אז גם v_1,v_2,w,v_4 בלתי תלויים לינארית.

טענה נכונה: יהיו $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in F$ כך ש $\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3w+\beta_4v_4=0$. נוכיח כי כל הסקלרים הם 0.

נציב את w: $\beta_1v_1+\beta_2v_2+\beta_3(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3+\alpha_4v_4)+\beta_4v_4=0$. נוציא את v_j מחוץ לסוגרים:

$(\beta_1+\beta_3\alpha_1)v_1+(\beta_2+\beta_3\alpha_2)v_2+(\beta_3\alpha_3)v_3+(\beta_4+\alpha_4\beta_3)v_4=0$. אבל נתון כי v_1,v_2,v_3,v_4 וקטורים בלתי תלויים לינארית, ולכן כל המקדמים הם 0 כלומר

$(\beta_1+\beta_3\alpha_1)=(\beta_2+\beta_3\alpha_2)=(\beta_3\alpha_3)=(\beta_4+\alpha_4\beta_3)=0$. מהשוויון $(\beta_3\alpha_3)=0$ והנתון $\alpha_3\neq 0$ נובע ש $\beta_3=0$. נציב בשאר המשוואות ונקבל גם $\beta_1=\beta_2=\beta_4=0$.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 3-7 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 3</u> : (7 נק')

נתונה המשוואה $|z|^2 - 1 = \mathrm{Im}(z)\cdot i\cdot(1-z)$ כאשר $z\in\mathbb{C}$. אזי:

א. למשוואה יש רק פתרונות ממשיים.

ב. למשוואה יש בדיוק פתרון אחד לא ממשי.

ג. למשוואה יש אינסוף פתרונות $z\in\mathbb{C}$ המקיימים $Im(z)=0$.

ד. למשוואה יש אינסוף פתרונות $z\in\mathbb{C}$ המקיימים $Re(z)>0$.

ה. למשואה יש בדיוק פתרון ממשי אחד.

פתרון שאלה 3:

נציב $z=a+ib\ ,\ a,b\in\mathbb{R}$. ונשווה חלק ממשי וחלק מדומה. נקבל:

$$a^2+b^2-1=b\cdot i\cdot(1-a-ib)=ib-abi+b^2$$
$$a^2-1=ib-abi$$
$$\begin{cases}a^2-1=0\\ b-ab=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm1\\ b-ab=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=0\end{cases},\ \begin{cases}a=1\\ b\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\ z=-1+0i=-1\ \ or\ \ z=1+bi\ ,\ b\in\mathbb{R}$$

סימון נכון: ד'.

<u>שאלה מס' 4</u> : (7 נק')

יהי $V=\mathbb{R}^{3\times3}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 3×3. סמנו מי מהבאים תת מרחב של V:

א. $W=\{A\in V\,|\,rank(A)\le2\}$.

ב. $W=\{A\in V\,|\,(trace(A))^2=0\}\cup\{A\in V\,|\,A^t=-A\}$.

ג. $W=\left\{A\in V\,\middle|\,A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$.

ד. $W=\{A\in V\,|\,A^2=0\}$.

ה. $W=\{A\in V\,|\,A+A^t=I\}\cap\{A\in V\,|\,A^t=A\}$.

פתרון שאלה 4:

א. **לא תת מרחב**. אין סגירות לחיבור ניקח שתי מטריצות מדרגה קטנה או שווה 2, והסכום מדרגה 3 :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{\in W}+\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\in W}=\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\notin W}$$

ב. **כן תת מרחב**. מאחר ויש איחוד, צריך להראות הכלה. נבדוק מי נמצא בקבוצה :

$W_1=\left\{A\in V\,\middle|\,(trace(A))^2=0\right\}$:

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}\,\middle|\,(a+e+j)^2=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&j\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}\,\middle|\,a+e+j=0\right\}$$

וזה תת מרחב ידוע של V. גם $W_2=\left\{A\in V\,\middle|\,A^t=-A\right\}$ הוא תת מרחב של V, של המטריצות האנטי

סימטריות הממשיות. $W_2=\left\{\begin{pmatrix}0&x&y\\-x&0&z\\-y&-z&0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}\,\middle|\,x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$. מאחר ואברי האלכסון הם 0, הרי

ש $W_2\subset W_1$. לכן $W_1\cup W_2=W_1$ שזה תת מרחב ידוע.

ג. **לא תת מרחב**. למעשה, הקבוצה בסעיף זה מכילה את כל המטריצות הממשיות מסדר 3 שבהן העמודה

האחרונה היא $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ובקבוצה זו אין סגירות לחיבור. למשל :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}}_{\in W}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}}_{\in W}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \left(\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&2\\0&0&3\end{pmatrix}}_{\notin W}\right)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

ד. **לא תת מרחב** : אין סגירות לחיבור.

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}^2}_{\in W}=0,\ \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^2}_{\in W},\ \left(\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right)^2=\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}^2}_{\notin W}=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\neq0$$

ה. **לא תת מרחב** : אם נציב בקבוצה $\left\{A\in V\,\middle|\,A+A^t=I\right\}$ את התנאי $\left\{A\in V\,\middle|\,A^t=A\right\}$ נקבל $2A=I$

לכן $W=\left\{\frac{1}{2}I\right\}$ וזה לא מרחב וקטורי.

סימון נכון: ב'.

<u>שאלה מס' 5</u> : (7 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ ותהי $Q=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$. אזי השורה הראשונה של QA היא:

א. השורה הראשונה של Q^2A.

ב. השורה השלישית של Q^2A.

ג. השורה הראשונה של A.

ד. השורה השלישית של A.

ה. השורה השנייה של Q^2A.

פתרון שאלה 5:

נסמן את שורות המטריצה A ב- A_j ונחשב את QA , Q^2A :

$$Q^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

.

$$A=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{pmatrix}\Rightarrow QA=\begin{pmatrix}A_2\\A_4\\A_1\\A_3\end{pmatrix}\quad,\quad Q^2A=\begin{pmatrix}A_4\\A_3\\A_2\\A_1\end{pmatrix}$$

סימון נכון: ב'.

<u>שאלה מס' 6</u> : (7 נק')

יהי $V=\mathbb{R}_3[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה קטנה או שווה 3 עם מקדמים ממשיים.

יהיו U ו- W שני תתי-המרחבים הבאים של V:

$$U=\{p(x)\in V\mid p(1)=0\}$$
$$W=span\{1+x-3x^3\ ,\ 2+3x-4x^3\ ,\ 3+4x+x^2-4x^3\}$$

נתון כי $g(x)=a+8x+bx^2-8x^3\in U\cap W$ אזי:

א. $a=-4\ ,\ b=4$.

ב. $a=3\ ,\ b=-3$.

ג. $a=0\ ,\ b=0$.

ד. $a=8\ ,\ b=-8$.

ה. $a=-5\ ,\ b=5$.

פתרון שאלה 6:

נדרג את הקבוצה הפורשת של W למציאת בסיס נוח ל- W. נמצא איבר כללי של W ע"י צירוף לינארי של הבסיס הנוח, ונאלץ עליו את תנאי U. נקבל איבר כללי לחיתוך, אותו נשווה לאיבר הנתון למציאת a,b:

$$U=\left\{p(x)\in V \,\middle|\, p(1)=0\right\}$$

$$W=span\left\{1+x-3x^3\ ,\ 2+3x-4x^3\ ,\ 3+4x+x^2-4x^3\right\}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\2&3&0&-4\\3&4&1&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\0&1&0&2\\0&1&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&-3\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

$$\alpha(1-5x^3)+\beta(x+2x^3)+\gamma(x^2+3x^3)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+(-5\alpha+2\beta+3\gamma)x^3$$

$$\alpha+\beta x+\gamma x^2+(-5\alpha+2\beta+3\gamma)x^3\ \in\ U\cap W\ \Leftrightarrow\ \alpha+\beta+\gamma-5\alpha+2\beta+3\gamma=0$$

$$\Leftrightarrow\ -4\alpha+3\beta+4\gamma=0\ \Leftrightarrow\ 4\alpha=3\beta+4\gamma\ \Leftrightarrow\ \alpha=\tfrac{3}{4}\beta+\gamma$$

$$\tfrac{3}{4}\beta+\gamma+\beta x+\gamma x^2+(-5(\tfrac{3}{4}\beta+\gamma)+2\beta+3\gamma)x^3$$

$$U\cap W=\left\{\tfrac{3}{4}\beta+\gamma+\beta x+\gamma x^2+(-5(\tfrac{3}{4}\beta+\gamma)+2\beta+3\gamma)x^3 \,\middle|\, \beta,\gamma\in\mathbb{R}\right\}$$

$$a+8x+bx^2-8x^3=\tfrac{3}{4}\beta+\gamma+\beta x+\gamma x^2+(-5(\tfrac{3}{4}\beta+\gamma)+2\beta+3\gamma)x^3$$

$$\begin{cases}a=\frac{3}{4}\beta+\gamma\\8=\beta\\b=\gamma\\-8=-5(\frac{3}{4}\beta+\gamma)+2\beta+3\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{4}\cdot 8+b\\8=\beta\\b=\gamma\\-8=-5(\frac{3}{4}\cdot 8+b)+2\cdot 8+3b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=6\\\beta=8\\\gamma=b\\b=-3\end{cases}\Rightarrow\ a=3\ ,\ b=-3$$

סימון נכון: ב'.

<u>שאלה מס' 7</u>: (7 נק')

יהי V מרחב וקטורי מעל לשדה F, ויהיו S , T שתי קבוצות לא ריקות של וקטורים ב- V. נתון כי כל וקטור ב- S הוא צירוף לינארי של הוקטורים ב- T. אזי:

א. אם T תלויה ליניארית אז גם S תלויה ליניארית.

ב. S תלויה ליניארית.

ג. $sp\{T\}\subseteq sp\{S\}$.

ד. $S\cap T\neq\emptyset$.

ה. $sp\{T\}+sp\{S\}=sp\{T\}$.

פתרון שאלה 7:

נעבור על כל הסעיפים ונשים לב שמהנתון שכל וקטור ב- S הוא ק"ל של הוקטורים ב- T, נובע כי $S\subset sp\{T\}$:

א. לא נכון. למשל: $S=\{(3,0)\}$, $T=\{(1,0)\ ,\ (2,0)\}$ אז $S\subset sp\{T\}$ ו- T תלויה ליניארית אבל S בלתי תלויה לינארית.

ב. לא נכון. למשל הדוגמא בסעיף א'.

ג. לא נכון. הכיוון ההפוך הוא הנכון. למשל: $S=\{(3,0)\}$, $T=\{(1,0)\ ,\ (0,1)\}$ אז $S\subset sp\{T\}$ אבל $sp\{T\}\nsubseteq sp\{S\}$.

ד. לא נכון. למשל הדוגמא בסעיף א', מתקיים בנוסף $S\cap T=\emptyset$.

ה. נכון. כאמור, מהנתון נובע $S\subset sp\{T\}$ ולכן גם אז $sp\{S\}\subseteq sp\{T\}$ ולכן $sp\{T\}+sp\{S\}=sp\{T\}$.

נוכיח ע"י הכלה כפולה:

$sp\{T\}+sp\{S\}\supseteq sp\{T\}$: אם $v\in sp\{T\}$ נכתוב: $v=v+0$ ולכן $v\in sp\{T\}+sp\{S\}$.

$sp\{T\}+sp\{S\}\subseteq sp\{T\}$: אם $v\in sp\{T\}+sp\{S\}$ נכתוב: $v=u+w$ כאשר $u\in sp\{T\}$, $w\in sp\{S\}\subseteq sp\{T\}$ כלומר קיבלנו שגם $w\in sp\{T\}$. אבל $sp\{T\}$ תת מרחב סגור לחיבור ולכן $v=u+w\in sp\{T\}$.